

## Umiejętności matematyczne

### Założenia teoretyczne pomiaru umiejętności matematycznych

Badanie PISA mierzy, na ile skutecznie poszczególne kraje przygotowują uczniów do korzystania z matematyki do rozwiązywania problemów, przed jakimi stawia ich otaczający świat w kontekście życia osobistego, obywatelskiego i zawodowego, aby mogli stać się racjonalnymi, zaangażowanymi i refleksyjnymi członkami społeczeństwa XXI wieku.

Założenia matematycznej części badania PISA 2022 określają niezbędny w dorosłym życiu zakres umiejętności matematycznych, obejmujący rozumowanie matematyczne oraz rozwiązywanie problemów, którego cykl składa się z trzech procesów: formułowania, stosowania oraz interpretowania. Obejmuje to wykorzystanie pojęć, własności, procedur i narzędzi do opisywania, wyjaśniania i przewidywania zjawisk. Założenia opisują także sposób, w jaki wiedza matematyczna jest podzielona na cztery kategorie treści oraz cztery rodzaje kontekstów, w których uczniowie mierzą się z wyzwaniami matematycznymi.

### Rozumowanie matematyczne

Zakres niezbędnych umiejętności matematycznych obejmuje także zdolność do rozumowania matematycznego. To ważna umiejętność, która pozwala wyjść poza zakres rutynowych kontekstów i wielokrotnie przećwiczonych sposobów rozwiązywania zadań. Szybko zmieniający się świat powoduje, że pojawiają się coraz to nowe problemy; opanowanie zasobu rutyn nie gwarantuje już radzenia sobie z nimi. Z tego powodu w badaniu PISA 2022 utworzono nową skalę do mierzenia umiejętności rozumowania matematycznego.

Rozumowanie matematyczne obejmuje co najmniej sześć kluczowych aspektów. Są to:

- rozumienie liczb, systemów liczbowych i ich właściwości algebraicznych,
- rozumienie znaczenia abstrakcji i reprezentacji symbolicznej,
- dostrzeganie struktur matematycznych i ich regularności,
- dostrzeganie zależności funkcyjnych między różnymi wielkościami,
- wykorzystanie modelowania matematycznego jako okna do świata rzeczywistego (np. do zagadnień badanych przez nauki fizyczne, biologiczne, społeczne, ekonomiczne i behawioralne),
- rozumienie analizy zmienności jako podstawy statystyki.

### Wiedza matematyczna

Znajomość i rozumienie wiedzy matematycznej oraz umiejętność jej zastosowania do rozwiązywania realnych problemów są ważne we współczesnym świecie. Aby stosować matematyczne rozumowanie przy rozwiązywaniu problemów i interpretowaniu sytuacji w kontekście osobistym, zawodowym, społecznym i naukowym, należy posiadać pewien zasób i rozumienie wiedzy matematycznej.

W badaniu PISA wyróżniono cztery obszary, na które należy zwrócić szczególną uwagę. Są to:

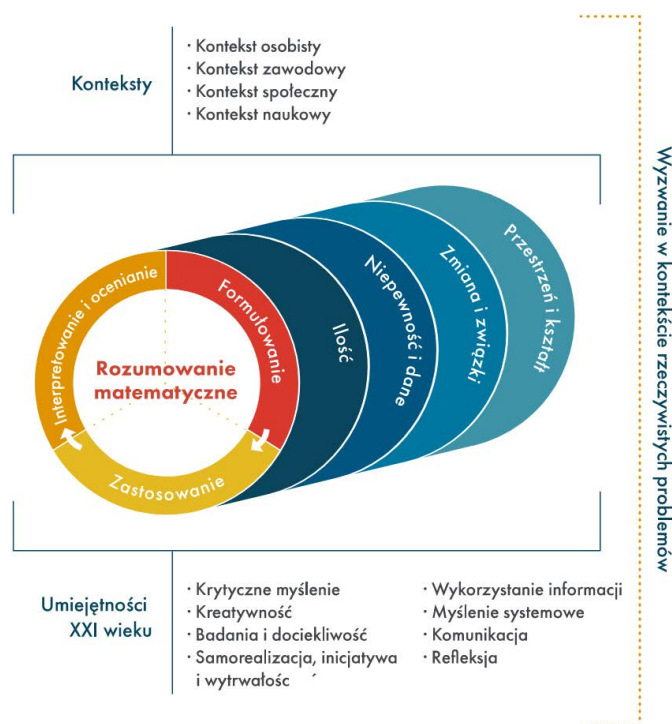
- zależności funkcyjne i relacje (zmiana i związki),
- sytuacje geometryczne i związki przestrzenne (przestrzeń i kształt),
- obliczenia, szacowanie, przybliżanie wartości liczbowych oraz symulacje komputerowe (ilość),
- zjawiska losowe, rozważania o charakterze statystycznym, warunkowe podejmowanie decyzji (niepewność i dane).

Współczesny rozwój technologii sprawia, że uczniowie muszą rozumieć również koncepcje myślenia komputacyjnego, których pewne aspekty mają charakter umiejętności matematycznych.

## Konteksty

Ważnym aspektem określenia zakresu niezbędnych umiejętności matematycznych jest to, że matematyka jest używana do rozwiązywania problemów umieszczonych w realnym kontekście. Wybór odpowiednich strategii matematycznych i reprezentacji jest często zależny właśnie od kontekstu, w którym pojawia się problem. W przypadku badania PISA ważne jest stosowanie szerokiej gamy kontekstów – osobistego, zawodowego, społecznego i naukowego.

**Rysunek 1** ilustruje założenia teoretyczne matematycznej części badania.



W badaniu PISA 2022 w części matematycznej użyto 234 zadań (otwartych i zamkniętych). Umiejętności matematyczne były dziedziną wiodącą w edycji badania w 2022 roku. W związku z tym wśród zadań dla uczniów znalazły się zarówno zadania użyte w poprzednich edycjach (tzw. zadania „kotwiczące”, w sumie było ich 74), jak i zadania nowe (160 zadań). Dzięki użyciu tych samych zadań w różnych edycjach badania możliwe jest porównywanie zmian wyników w czasie. Zadania różniły się stopniem trudności, co pozwala na określenie zróżnicowania umiejętności piętnastolatków oraz na określenie stopnia opanowania przez nich umiejętności

sprawdzanych w badaniu. Kompetencje z zakresu matematycznego formułowania problemów sprawdzano w 48 zadaniach, zastosowanie matematycznych pojęć, faktów i procedur w 75 zadaniach, interpretowanie matematycznych rozwiązań, wyników lub wniosków w realnym kontekście w 57 zadaniach, a rozumowanie matematyczne – w 54 zadaniach.

## Poziomy umiejętności matematycznych

Dla lepszego objaśnienia uzyskanych wyników, na skali matematycznej badania PISA wyróżniono sześć poziomów oraz podano typowe umiejętności uczniów, które plasują się na każdym z nich oraz podano umiejętności typowe dla uczniów, którzy plasują się na każdym z nich.

**Tabela 1.** Opis poziomów umiejętności matematycznych w badaniu PISA

Poziom (dolna granica)	Charakterystyka umiejętności typowych dla danego poziomu
Poziom 6 669 pkt	Na poziomie 6 uczniowie potrafią pracować z problemami sformułowanymi w abstrakcyjny sposób, wykazując się kreatywnym i elastycznym myśleniem w poszukiwaniu rozwiązania. Na przykład potrafią dostrzec możliwość zastosowania w niestandardowym kontekście procedury matematycznej, o której nie ma mowy w opisie zadania lub wykazują się głębokim zrozumieniem pojęcia matematycznego, uzasadniając swoje rozumowanie. Potrafią powiązać różne źródła informacji oraz różne reprezentacje, a także efektywnie wykorzystywać symulacje lub arkusze kalkulacyjne w celu rozwiązania problemu. Uczniowie na tym poziomie potrafią myśleć krytycznie oraz biegle posługują się operacjami symbolicznymi i formalnymi, aby precyzyjnie przedstawić swoje rozumowanie. Umieją ocenić trafność podjętych działań oraz poprawność sposobu rozumowania i uzyskanego rozwiązania w odniesieniu do postawionego problemu.
Poziom 5 607 pkt	Na poziomie 5 uczniowie potrafią konstruować modele złożonych sytuacji i pracować z nimi, identyfikując ograniczenia i robiąc niezbędne założenia. Potrafią stosować systematyczne, dobrze zaplanowane strategie w celu rozwiązywania złożonych zadań, takich jak zaplanowanie eksperymentu, zaprojektowanie optymalnej procedury lub opracowanie złożonej wizualizacji, które nie są podane w zadaniu. Radzą sobie z problemami, których rozwiązania wymagają użycia wiedzy matematycznej niepodanej wprost w zadaniu. Uczniowie na tym poziomie potrafią ocenić poprawność swojej pracy i skonfrontować uzyskane wyniki z praktycznym kontekstem rozwiązywanego problemu.
Poziom 4 545 pkt	Na poziomie 4 uczniowie potrafią efektywnie pracować z podanymi wprost modelami złożonych sytuacji realnych, czasem zawierających dwie zmienne oraz pracować z modelami, które samodzielnie stworzyli, używając myślenia komputacyjnego. Uczniowie na tym poziomie stosują niektóre aspekty krytycznego myślenia, takie jak ocena sensowności uzyskanego wyniku, posługując się rozumowaniem jakościowym w sytuacji, gdy sprawdzenie bezpośrednim rachunkiem nie jest możliwe. Umieją wybierać i łączyć różne reprezentacje, w tym symboliczne i graficzne, wiążąc je bezpośrednio z rozważaną sytuacją praktyczną. Na tym poziomie uczeń umie konstruować komunikaty opisujące swoje interpretacje, argumenty i przyjętą metodologię.

Poziom 3 482 pkt	Na poziomie 3 uczniowie potrafią budować strategie, także takie, które wymagają sekwencyjnego podejmowania decyzji lub elastyczności w rozumieniu znanych pojęć. Zaczynają używać myślenia komputacyjnego do opracowania strategii rozwiązania. Potrafią rozwiązywać zadania, które wymagają wykonania kilku różnych, lecz rutynowych obliczeń, które nie są wskazane wprost w treści zadania. Umieją zastosować wizualizację przestrzenną oraz określić, jak użyć symulacji, aby zebrać dane potrzebne do rozwiązania zadania. Uczniowie na tym poziomie potrafią interpretować oraz wykorzystywać informacje pochodzące z różnych źródeł oraz wyciągać z nich bezpośrednie wnioski, także w zakresie wnioskowania warunkowego na podstawie tablic dwuwymiarowych. Typowe umiejętności uczniów na tym poziomie to pewna biegłość w posługiwaniu się procentami, ułamkami zwykłymi i dziesiętnymi oraz proporcjami.
Poziom 2 420 pkt	Na poziomie 2 uczniowie potrafią rozpoznać sytuacje, w których muszą stworzyć prostą strategię rozwiązania problemu, na przykład polegającą na przeprowadzeniu prostej symulacji dotyczącej jednej zmiennej. Potrafią wydobyć istotne informacje z jednego lub z większej liczby źródeł oraz wykorzystują reprezentacje, takie jak tabele, wykresy lub płaskie reprezentacje obiektów trójwymiarowych. Uczniowie na tym poziomie wykazują podstawowe zrozumienie związków funkcyjnych i potrafią rozwiązywać zadania, wykorzystując proste zależności. Potrafią dosłownie zinterpretować uzyskane wyniki.
Poziom 1a 358 pkt	Na poziomie 1a uczniowie potrafią odpowiedzieć na jasno sformułowane pytania dotyczące prostych kontekstów, gdzie wszystkie potrzebne informacje są podane. Umieją skorzystać z informacji z dwóch źródeł oraz danych zaprezentowanych w kilku prostych formach. Potrafią wykonywać proste, rutynowe czynności zgodnie z podanymi wprost wskazówkami, również wtedy, gdy uzyskanie wyniku wymaga kilkukrotnego powtórzenia rutynowego działania. Podejmują działania, które są oczywiste lub wymagają tylko minimalnej syntezy informacji w sytuacjach, gdy niezbędne działania wynikają jasno z polecenia. Uczniowie na tym poziomie potrafią wykorzystać podstawowe procedury, wzory i działania, aby rozwiązać zadania najczęściej dotyczące liczb całkowitych.
Poziom 1b 295 pkt	Na poziomie 1b uczniowie potrafią odpowiedzieć na pytania dotyczące prostych kontekstów, gdy wszystkie potrzebne informacje są podane wprost za pomocą prostej reprezentacji (np. tabeli lub rysunku). Umieją rozpoznać, które dane są zbędne i mogą być pominięte w rozwiązaniu problemu. Potrafią wykonywać proste obliczenia na liczbach całkowitych, gdy mają jasne polecenia podane w krótkim, prostym tekście.
Poziom 1c 233 pkt	Na poziomie 1c uczniowie potrafią odpowiedzieć na pytania dotyczące prostych kontekstów, gdzie wszystkie potrzebne informacje są podane wprost za pomocą prostej, znanej reprezentacji (np. małej tabeli lub prostego rysunku) w bardzo krótkim i prostym tekście. Potrafią wykonać proste polecenie, opisujące jeden krok lub działanie.

Więcej informacji na temat teoretycznych założeń matematycznej części badania PISA 2022 znajduje się na dedykowanej stronie internetowej: <https://pisa2022-maths.oecd.org/po/index.html>